

Curs 6

Modelarea problemelor de rețea și distribuție (I)

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Suport curs MADDM · Lăcrimioara Grama · [CC BY-NC-SA 4.0](#)



Cursul precedent



Aplicații ale programării liniare în managementul operațiunilor

- ✓ Decizii de tip make-or-buy
- ✓ Planificarea producției
- ✓ Repartizarea forței de muncă
- ✓ Probleme de mixare

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice structura unui model de rețea: noduri, arce, fluxuri, oferte, cereri și costuri;
- formuleze modele LP pentru probleme de transport;
- interpreteze cazuri speciale ale problemelor de transport: ofertă/cerere dezechilibrată, rute inexistente, capacități minime sau maxime;
- formuleze modele LP pentru probleme de transbordare / trafic combinat;
- formuleze probleme de atribuire ca situații particulare ale problemelor de transport;
- interpreteze soluțiile obținute și implicațiile manageriale ale acestora

Obiectivele cursului



Cuprins

Introducere

Probleme de transport

- Cazuri speciale
- Exemplu

Probleme de transbordare / trafic combinat

- Cazuri speciale
- Exemplu

Probleme de atribuire / alocare

- Cazuri speciale
- Exemplu

Rezumat

Introducere: modele de rețea

Model de rețea (*network model*)

Model care poate fi reprezentat prin:

- **noduri** – surse, destinații, depozite, activități
- **arce** – rute, legături, relații între noduri
- **fluxuri** – cantități transportate, alocate sau transmise prin rețea
- **parametri asociați** – costuri, capacități, oferte, cereri

Proprietate utilă: în modelele standard de flux de rețea, dacă ofertele și cererile sunt întregi, soluția optimă poate avea valori întregi

Probleme LP de flux de rețea

- probleme de transport
- probleme de transbordare / trafic combinat
- probleme de atribuire
- probleme de rută minimă
- probleme de flux maxim
- planificarea proiectelor PERT/CPM



Lanțul de aprovizionare și deciziile de distribuție

Lanț de aprovizionare (*supply chain*)

Lanțul de aprovizionare reprezintă ansamblul resurselor, activităților și organizațiilor interconectate implicate în producerea și distribuirea unui produs

În general, acesta este proiectat pentru a satisface cererea clienților cu **costuri minime**

Întrebări manageriale

Managerii trebuie să decidă:

- unde să fie produs un anumit produs?
- cât trebuie produs?
- unde trebuie trimis produsul?
- ce rute sau centre de distribuție trebuie utilizate?



Cuprins

Introducere

Probleme de transport

- Cazuri speciale
- Exemplu

Probleme de transbordare / trafic combinat

Probleme de atribuire / alocare

Rezumat

Probleme de transport

Problema transportului urmărește planificarea distribuției de bunuri sau servicii de la mai multe locații de aprovizionare către mai multe locații cu cerere

Elemente ale rețelei

Sursă – locația care furnizează marfa

Destinație – locația unde ajunge marfa

Unități de flux – unitățile cantitative care se deplasează prin rețea

Date cunoscute

De obicei, în problema transportului sunt cunoscute:

- cantitatea disponibilă la fiecare sursă
- cererea fiecărei destinații
- costul de transport pe unitate, pentru fiecare rută sursă–destinație



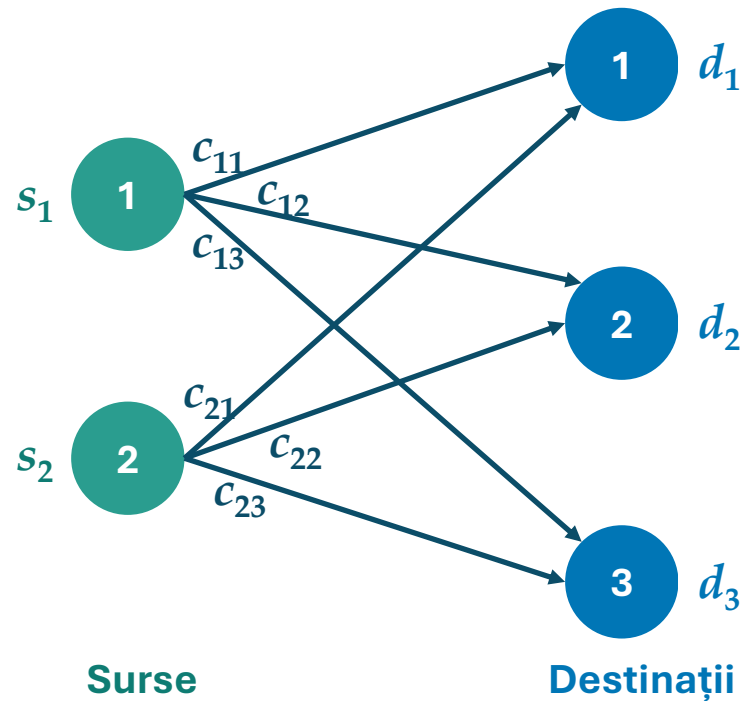
Obiectiv

Determinarea cantităților expediate de la fiecare sursă la fiecare destinație, astfel încât **costul total de transport să fie minim**

Se consideră m surse, fiecare cu oferta s_i , și n destinații, fiecare cu cererea d_j . Costul unitar pe ruta $i \rightarrow j$ este c_{ij}

Probleme de transport (cont.)

Ex: Rețea de transport cu 2 surse și 3 destinații



- Cercurile reprezintă nodurile rețelei
 - **noduri sursă**: oferta este scrisă lângă fiecare sursă
 - **noduri destinație**: cererea este scrisă lângă fiecare destinație
- Liniile reprezintă arcele/rutele
 - fluxul se deplasează de la **surse** către **destinații**
 - **direcția fluxului** este indicată prin săgeți
 - pe fiecare arc este notat **costul unitar** c_{ij}

Problemă de transport = problemă de flux în rețea

Probleme de transport: formularea modelului LP

Notății

Toate cantitățile sunt exprimate în unități de flux

x_{ij} – cantitatea expedită de la sursa i la destinația j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)

c_{ij} – costul unitar de transport pe ruta $i \rightarrow j$

s_i – oferta/capacitatea disponibilă la sursa i

d_j – cererea destinației j

➤ Model matematic

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{funcția obiectiv}) \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (\text{ofertă}) \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (\text{cerere}) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \end{array}$$

Probleme de transport: cazuri speciale

Oferta totală $\neq$ cererea totală

Oferta totală > Cererea totală

- Modelul LP rămâne fezabil
- Oferta excedentară apare ca **surplus** în soluție
- Surplusul reprezintă cantitatea disponibilă, dar **neexpediată**

Cererea totală > Oferta totală

- Modelul LP nu are soluție fezabilă în forma inițială
- Se modifică reprezentarea rețelei:
 - Se adaugă o **sursă fictivă** (*dummy origin*) cu ofertă egală cu deficitul
 - Arcele din sursa fictivă au **cost zero**
 - Cantitatea “expediată” din sursa fictivă reprezintă cerere neacoperită
- Destinațiile care ”primesc” produse de la sursa fictivă se confruntă cu un deficit de produse/au cererea neacoperită

Idee-cheie: dezechilibrul ofertă–cerere se tratează fie prin surplus, fie prin introducerea unei surse fictive

Probleme de transport: cazuri speciale (cont.)

Obiectiv de maximizare profit/venituri

- Dacă se urmărește maximizarea profitului sau a veniturilor, profitul/venitul unitar se introduce drept coeficient în funcția obiectiv
- Constrângerile modelului rămân neschimbate

Transport minim garantat

- Dacă pe ruta $i \rightarrow j$ trebuie transportată cel puțin cantitatea M_{ij} , se adaugă restricția:

$$x_{ij} \geq M_{ij}$$

Capacitate maximă pe rută

- Dacă pe ruta $i \rightarrow j$ poate fi transportată cel mult cantitatea L_{ij} se adaugă restricția:

$$x_{ij} \leq L_{ij}$$

Rute inacceptabile/inutilizabile

- Dacă o rută nu poate fi utilizată, arcul corespunzător se elimină din rețea
- Echivalent, se poate impune:

$$x_{ij} = 0$$

Problemă de transport: exemplu

Ex: Compania X trebuie să transporte un produs de la trei unități de producție către patru centre regionale de distribuție. Managerul dorește să stabilească ce cantitate trebuie expediată de la fiecare unitate de producție către fiecare centru de distribuție, astfel încât **cererile să fie satisfăcute**, iar **costul total de transport să fie minim**.

Centrele de producție sunt situate în **Cluj-Napoca**, **Oradea** și **Brașov**, iar capacitățile planificate pentru următoarele trei luni sunt:

Sursă	Uzină	Capacitatea de producție pe trei luni [unități]
1	Cluj-Napoca	5000
2	Oradea	6000
3	Brașov	2500
Total		13,500

Sursă	Destinație			
	București	Craiova	Constanța	Iași
Cluj-Napoca	15	10	35	30
Oradea	25	10	35	15
Brașov	10	25	20	25

Centrele regionale de distribuție sunt situate în **București**, **Craiova**, **Constanța** și **Iași**, iar cererea preconizată este:

Destinație	Centru distribuție	Cerere preconizată pe trei luni [unități]
1	București	6000
2	Craiova	4000
3	Constanța	2000
4	Iași	1500
Total		13,500

Costul de producție este considerat identic pentru cele trei unități de producție. Prin urmare, singurul cost variabil relevant este **costul de transport**, indicat pentru fiecare rută în tabelul costurilor unitare.

Exemplu – rețeaua de transport și variabilele de decizie

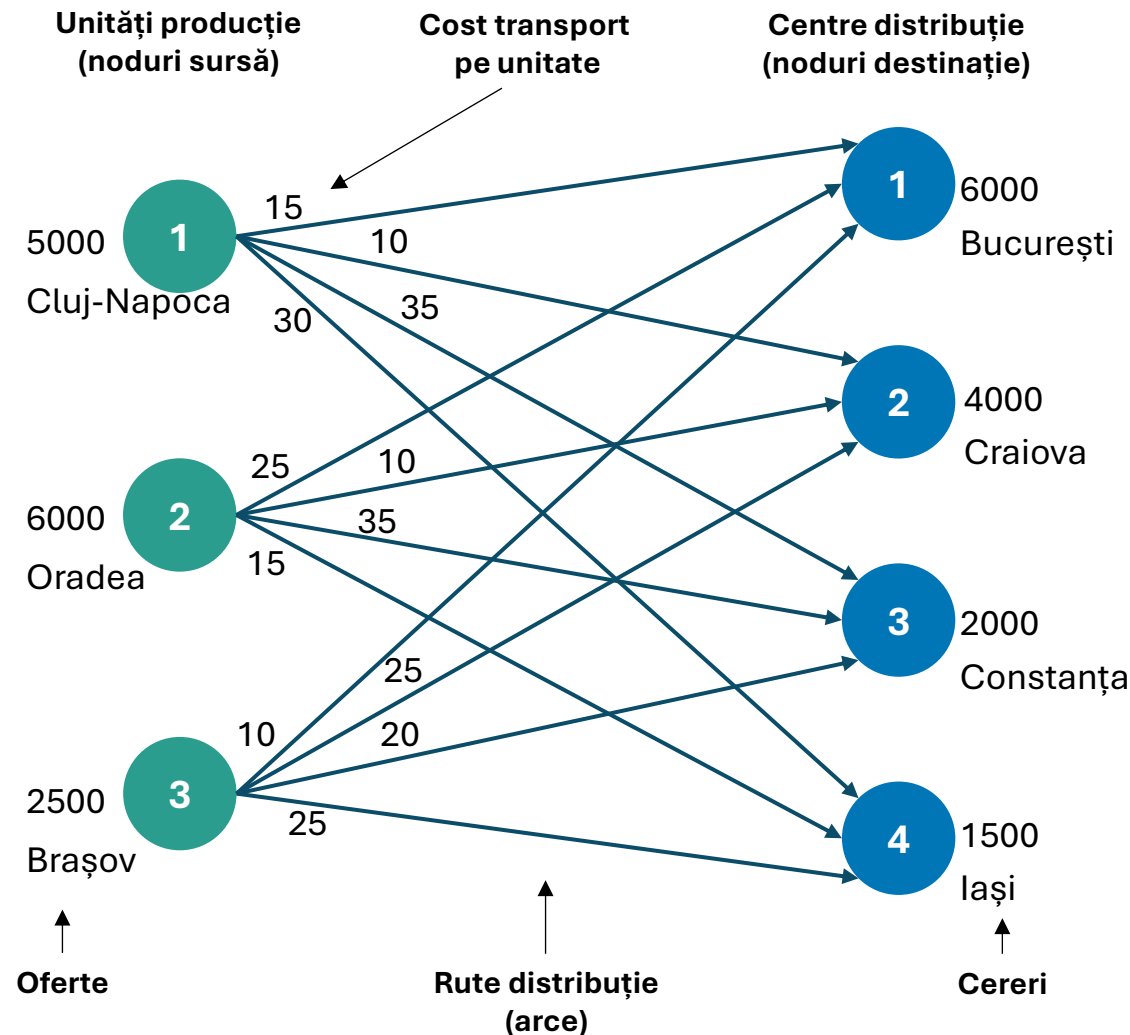
Rețeaua de transport

- reprezintă grafic cele **12 rute de distribuție** disponibile
- fiecare rută corespunde unei variabile de decizie
- modelul LP folosește indice dublu pentru variabile
 - x_{11} – numărul de unități expediate de la sursa 1, Cluj-Napoca, la destinația 1, București

Variabile de decizie

x_{ij} – numărul de unități expediate de la sursa i la destinația j
 ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$)

Sursă	Destinație			
	București	Craiova	Constanța	Iași
Cluj-Napoca	15	10	35	30
Oradea	25	10	35	15
Brașov	10	25	20	25



Exemplu – formularea modelului LP

Sursă	Destinație			
	București	Craiova	Constanța	Iași
Cluj-Napoca	15	10	35	30
Oradea	25	10	35	15
Brașov	10	25	20	25

Funcția obiectiv: minimizarea costului total de transport

$$\text{Min } 15x_{11} + 10x_{12} + 35x_{13} + 30x_{14} + 25x_{21} + 10x_{22} + 35x_{23} + 15x_{24} + 10x_{31} + 25x_{32} + 20x_{33} + 25x_{34}$$

cost transport dinspre Cluj-Napoca + cost transport dinspre Oradea + cost transport dinspre Brașov

➤ Constrângeri

C1 – C3: constrângeri de ofertă

- Ofertă Cluj-Napoca: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5000$
- Ofertă Oradea: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6000$
- Ofertă Brașov: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2500$

Sursă	Uzină	Capacitatea de producție pe trei luni [unități]
1	Cluj-Napoca	5000
2	Oradea	6000
3	Brașov	2500
Total		13,500

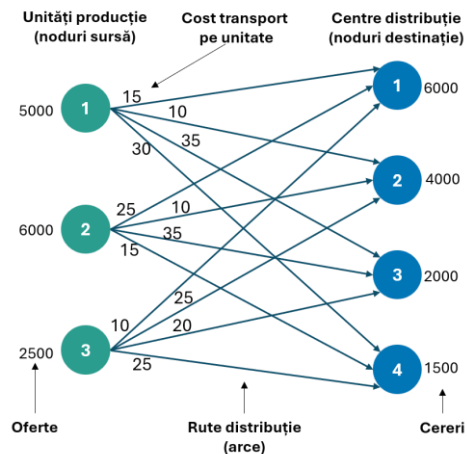
C4 – C7: constrângeri de cerere

- Cerere București: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000$
- Cerere Craiova: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000$
- Cerere Constanța: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000$
- Cerere Iași: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500$

Destinație	Centru distribuție	Cerere preconizată pe trei luni [unități]
1	București	6000
2	Craiova	4000
3	Constanța	2000
4	Iași	1500
Total		13,500

Exemplu – modelul LP complet

Min	$15x_{11}$	$+10x_{12}$	$+35x_{13}$	$+30x_{14}$	$+25x_{21}$	$+10x_{22}$	$+35x_{23}$	$+15x_{24}$	$+10x_{31}$	$+25x_{32}$	$+20x_{33}$	$+25x_{34}$	
s. t.	x_{11}	$+x_{12}$	$+x_{13}$	$+x_{14}$									≤ 5000
					x_{21}	$+x_{22}$	$+x_{23}$	$+x_{24}$					≤ 6000
									x_{31}	$+x_{32}$	$+x_{33}$	$+x_{34}$	≤ 2500
	x_{11}				$+x_{21}$				$+x_{31}$				$= 6000$
		x_{12}				$+x_{22}$				$+x_{32}$			$= 4000$
			x_{13}				$+x_{23}$				$+x_{33}$		$= 2000$
				x_{14}				$+x_{24}$				$+x_{34}$	$= 1500$
	$x_{11},$	$x_{12},$	$x_{13},$	$x_{14},$	$x_{21},$	$x_{22},$	$x_{23},$	$x_{24},$	$x_{31},$	$x_{32},$	$x_{33},$	x_{34}	≥ 0



OBS: formularea modelului LP pe baza rețelei de transport

- Toate informațiile necesare formulării modelului LP se regăsesc în rețea
- Fiecare arc corespunde unei variabile de decizie
- Fiecare nod generează o constrângere
- Pentru un nod sursă: suma fluxurilor care pleacă este limitată de oferta sursei
- Pentru un nod destinație: suma fluxurilor care intră trebuie să acopere cererea destinației

Exemplu – soluția optimă

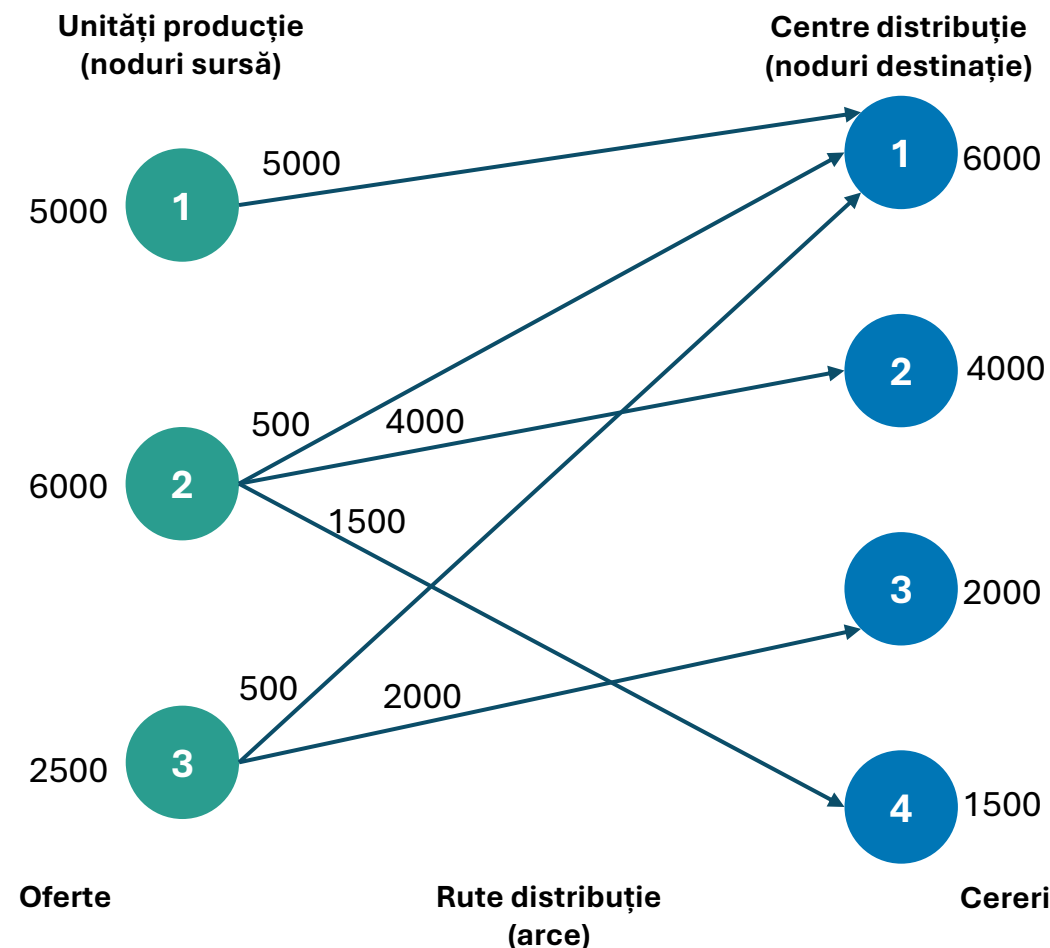
➤ Cost total minim: **195,000 lei**

Minimizare cost total		195000			
Sursa	Destinație				Total
	la Bucuresti	la Craiova	la Constanta	la Iasi	
Cluj-Napoca	5000	0	0	0	5000
Oradea	500	4000	0	1500	6000
Brasov	500	0	2000	0	2500
Total	6000	4000	2000	1500	
	=	=	=	=	
	6000	4000	2000	1500	



Interpretare: cererea fiecărui centru de distribuție este satisfăcută, iar toate capacitățile de producție sunt utilizate integral

Rutele active în soluția optimă



Observații

Dimensiunea modelului

Problemele de transport pot conduce la modele LP mari

- O problemă cu 100 de surse și 100 de destinații implică:
 $100 \cdot 100 = 10,000$
variabile de decizie

Rute inacceptabile

Dacă o rută nu poate fi utilizată, există mai multe opțiuni de modelare:

- se elimină arcul din rețea și variabila corespunzătoare din model
- se atribuie rutei un cost foarte mare în funcția obiectiv
- se impune direct constrângerea:

$$x_{ij} = 0$$

Soluții optime întregi

Pentru modelele standard de transport, dacă ofertele și cererile sunt numere întregi, poate fi aleasă o soluție optimă cu valori întregi ale variabilelor de decizie

- Această proprietate rezultă din structura specială a modelului LP
- Fiecare variabilă apare într-o constrângere de ofertă și într-o constrângere de cerere

Union Pacific Railroad era una dintre cele mai mari companii feroviare din America de Nord

- La momentul studiului, compania deținea peste **32,000 de mile de cale ferată**, avea aproximativ **50,000 de angajați**, peste **8000 de locomotive** și peste **100,000 de vagoane de marfă**

Context operațional

- După livrarea mărfurilor, vagoanele goale rămân la destinația clientului pentru descărcare
- Astfel, la un moment dat, vagoanele goale pot fi distribuite în multe locații ale rețelei feroviare

Problema decizională

- În același timp, clienții au nevoie de vagoane goale în alte locații, pentru încărcarea unor noi transporturi
- Decizia critică este stabilirea modului în care vagoanele goale trebuie alocate către punctele unde există cerere

Dificultăți suplimentare

- oferta de vagoane este, de obicei, mai mică decât cererea
- există mai multe tipuri de vagoane
- trebuie respectate termenele de livrare și controlate costurile

Atribuirea vagoanelor de marfă la Union Pacific Railroad¹

¹A.K. Narisetty, J. P. Richard, D. Ramcharan, D. Murphy, G. Minks, J. Fuller, "An Optimization Model for Empty Freight Car Assignment at Union Pacific Railroad", *Interfaces* (March/April: 2008): 89–102

Înainte de dezvoltarea modelului de optimizare, vagoanele erau alocate clienților pe baza tipului de vagon cerut

- Managerii nu dispuneau de un instrument care să evalueze impactul fiecărei alocări asupra întregii rețele feroviare

Union Pacific, în colaborare cu Purdue University, a dezvoltat un model de optimizare similar unei probleme de transport

- Modelul minimizează un cost ponderat, sub constrângeri de ofertă și cerere

Funcția obiectiv combină:

- costuri de transport;
- costuri de înlocuire a tipului de vagon
- penalități pentru abateri de la programul de livrare
- prioritatea clientului;
- eficiența coridorului de transport

Impact managerial: modelul a fost implementat cu succes și a condus la o rentabilitate a investiției de aproximativ 35%

Atribuirea vagoanelor de marfă la Union Pacific Railroad¹

¹A.K. Narisetty, J. P. Richard, D. Ramcharan, D. Murphy, G. Minks, J. Fuller, "An Optimization Model for Empty Freight Car Assignment at Union Pacific Railroad", *Interfaces* (March/April: 2008): 89–102

Cuprins

Introducere

Probleme de transport

Probleme de transbordare / trafic combinat

- Cazuri speciale
- Exemplu

Probleme de atribuire / alocare

Rezumat

Probleme de transbordare/trafic combinat

Problema de transbordare / trafic combinat (*transshipment problem*) este o problemă de transport în care expedierea poate trece prin unul sau mai multe **noduri intermediare** înainte de a ajunge la destinația finală

Problemele de transbordare

- extind problemele de transport prin introducerea unor noduri intermediare
- pot fi formulate și rezolvate ca modele LP
- pot fi transformate în probleme de transport extinse

Rute posibile în rețea

O expediție poate avea loc:

- direct de la sursă la destinație
- de la sursă la un nod intermediar, apoi la destinație
- între două noduri intermediare
- între două surse sau între două destinații, dacă modelul permite astfel de legături



Probleme de transbordare/trafic combinat (cont.)

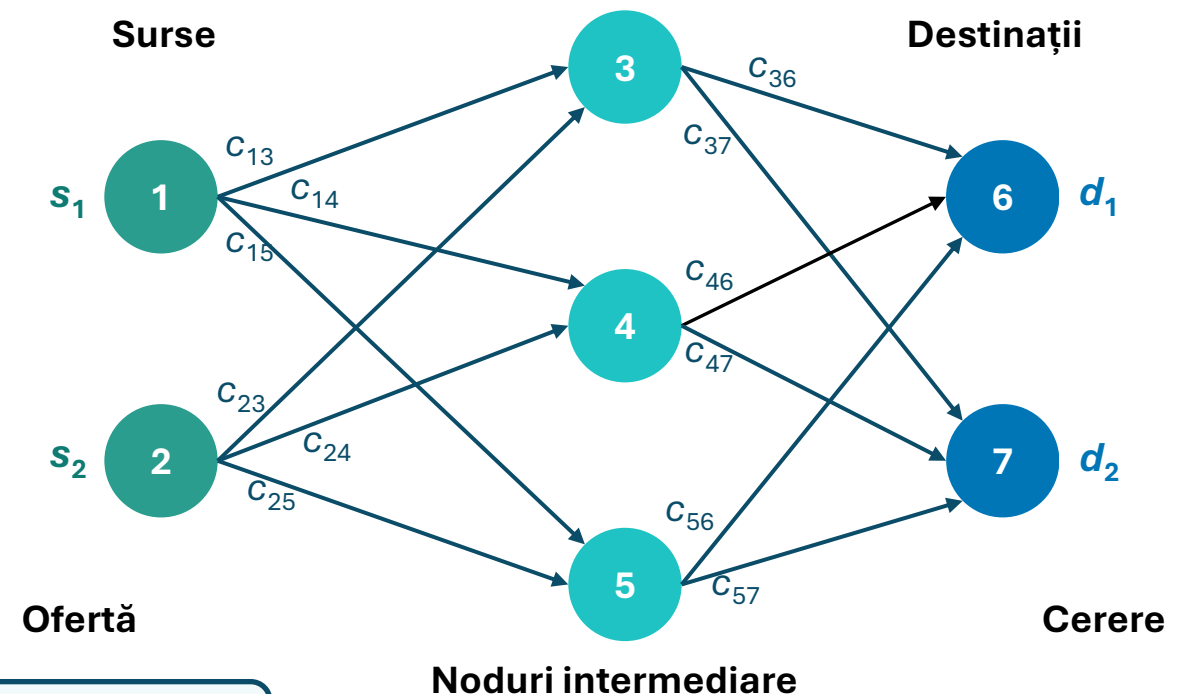


Obiectiv

Determinarea cantității transportate pe fiecare arc al rețelei, astfel încât cererile tuturor destinațiilor să fie satisfăcute, iar **costul total de transport să fie minim**

În nodurile intermediare: fluxul care intră = fluxul care iese

Ex: Rețea de trafic combinat cu 2 surse, 3 noduri intermediare și 2 destinații



Probleme de transbordare: formularea modelului LP

Notății

Toate cantitățile sunt exprimate în unități de flux

x_{ij} – cantitatea expediată pe arcul $i \rightarrow j$,
pentru arcele admise în rețea ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$)

c_{ij} – costul unitar de transport pe arcul $i \rightarrow j$

s_i – oferta/capacitatea disponibilă la sursa i

d_j – cererea destinației j

➤ Model matematic

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{\text{toate arcele}} c_{ij}x_{ij} \quad (\text{funcția obiectiv}) \\ \text{s. t.} & \sum_{\text{arce out din } i} x_{ij} - \sum_{\text{arce in în } i} x_{ji} \leq s_i \quad (\text{noduri sursă } i) \\ & \sum_{\text{arce out din } i} x_{ij} - \sum_{\text{arce in în } i} x_{ji} = 0 \quad (\text{noduri intermediare}) \\ & \sum_{\text{arce in în } j} x_{ij} - \sum_{\text{arce out din } j} x_{ji} = d_j \quad (\text{noduri destinație } j) \\ & x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{array}$$

Probleme de transbordare: cazuri speciale

➤ Cazuri speciale tratate similar cu problema de transport:

- oferta totală $\neq$ cererea totală
- obiectiv de maximizare
- transport minim garantat pe rută
- capacitate maximă pe arc/rută
- rute/arce inacceptabile

Idee-cheie: aceleași modificări se aplică, dar acum ele vizează arcele și nodurile unei rețele cu puncte intermediare

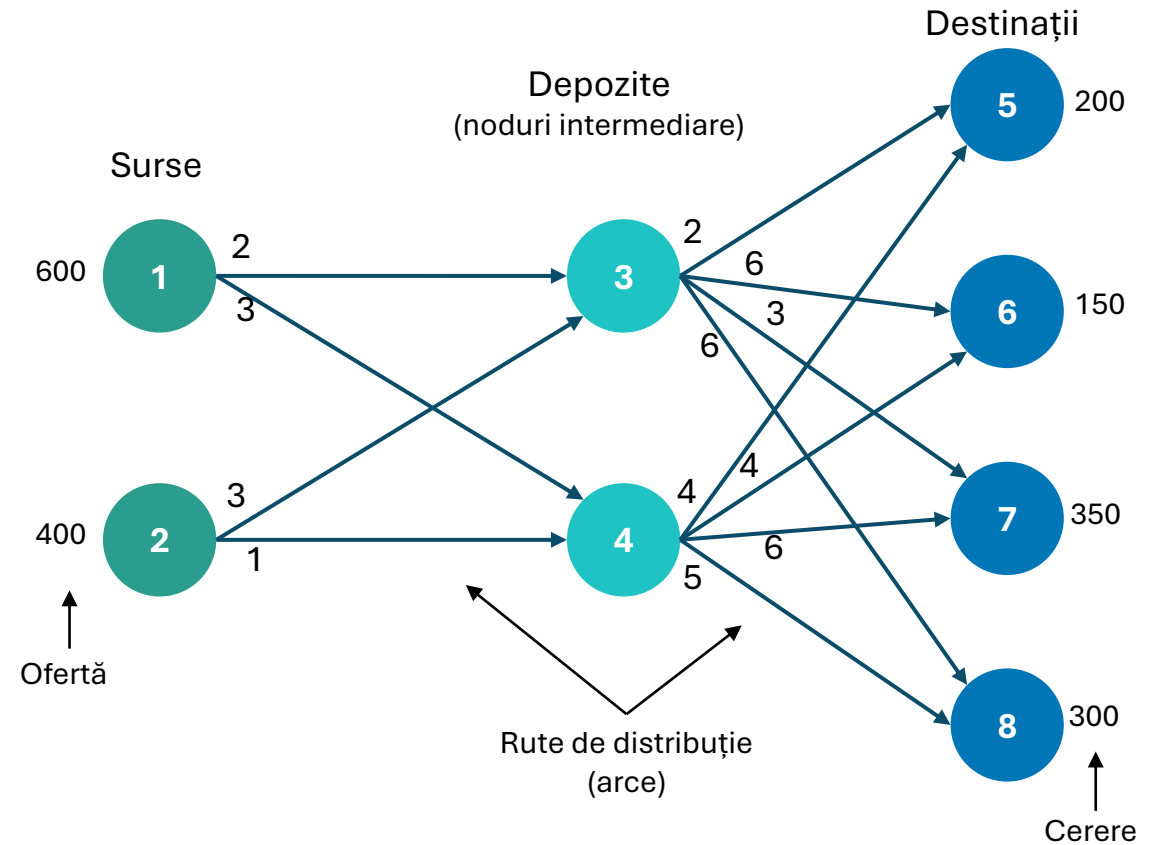
Problemă de transbordare: exemplu

² D.R. Anderson, D.J. Sweeney, T.A. Williams, J.D. Camm, K. Martin. An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making. Cengage Learning; 14 ed.

Ex²: Compania Ryan Electronics are centre de producție în Denver și Atlanta. Componentele electronice produse în oricare dintre cele două centre pot fi livrate către depozitele regionale ale companiei din Kansas City și Louisville. Din aceste depozite, firma aprovizionează magazinele de vânzare cu amănuntul din Detroit, Miami, Dallas și New Orleans.

Rețeaua corespunzătoare problemei este prezentată în figură.

- Oferta fiecărui centru de producție este indicată în stânga nodurilor sursă
- Cererea fiecărui magazin este indicată în dreapta nodurilor destinație
- Costul unitar de transport este indicat pe fiecare arc



Noduri sursă: 1 – Denver, 2 – Atlanta

Noduri intermediare: 3 – Kansas City, 4 – Louisville

Noduri destinație: 5 – Detroit, 6 – Miami, 7 – Dallas, 8 – New Orleans

Exemplu – variabilele de decizie și funcția obiectiv

Variabile de decizie

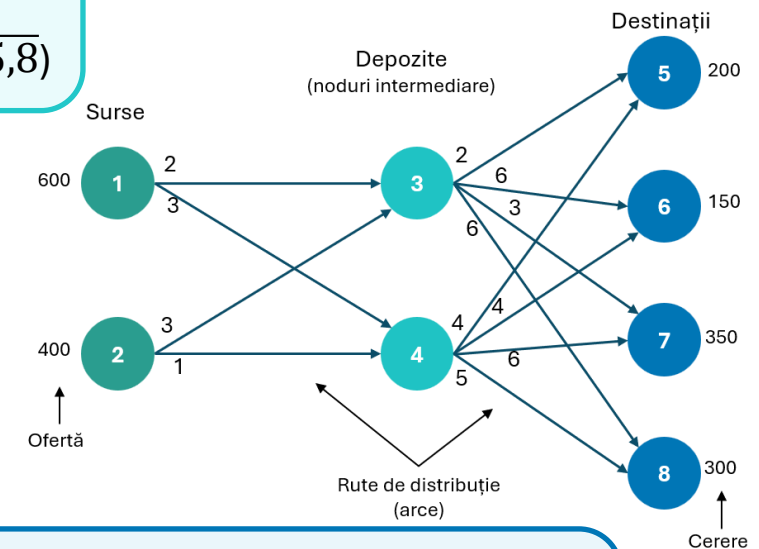
x_{ij} – numărul de unități expediate de la sursa i la depozitul j ($i = \overline{1,2}; j = \overline{3,4}$)

x_{jk} – numărul de unități expediate de la depozitul j la destinația k ($j = \overline{3,4}; k = \overline{5,8}$)

Noduri sursă: 1 – Denver, 2 – Atlanta

Noduri intermediare: 3 – Kansas City, 4 – Louisville

Noduri destinație: 5 – Detroit, 6 – Miami, 7 – Dallas, 8 – New Orleans



Funcția obiectiv: minimizarea costului total de transport

$$\text{Min } 2x_{13} + 3x_{14} + 3x_{23} + 1x_{24} + 2x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 6x_{38} + 4x_{45} + 4x_{46} + 6x_{47} + 5x_{48}$$

cost transport dinspre Denver + cost transport dinspre Atlanta + cost transport dinspre Kansas City + cost transport dinspre Louisville

Exemplu – constrângeri

➤ Constrângeri

C1 – C2: restricții referitoare la ofertă (noduri sursă)

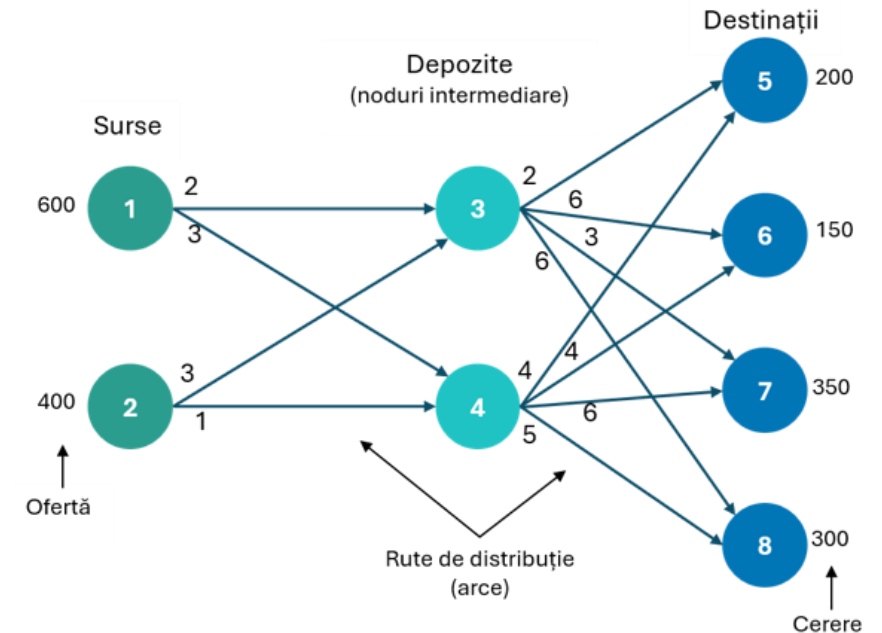
- Ofertă Denver: $x_{13} + x_{14} \leq 600$
- Ofertă Atlanta: _____

C3 – C4: Restricții referitoare la nodurile intermediare

- Kansas City: $x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = x_{13} + x_{23}$
 $\Leftrightarrow -x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 0$
- Louisville: _____

C5 – C8: Restricții referitoare la cerere (noduri destinație)

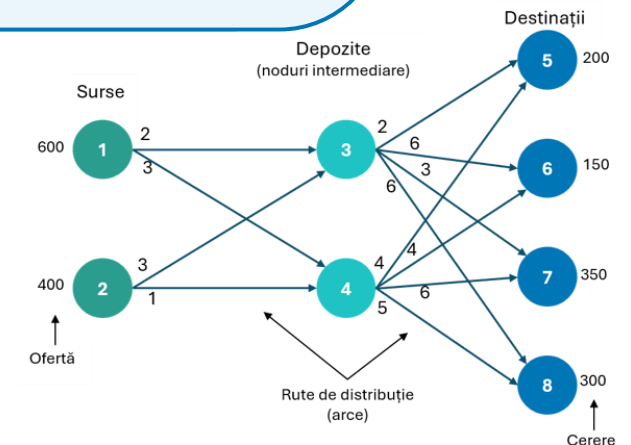
- Cerere Detroit: $x_{35} + x_{45} = 200$
- Cerere Miami: _____
- Cerere Dallas: _____
- Cerere New Orleans: _____



Noduri sursă: 1 – Denver, 2 – Atlanta
Noduri intermediare: 3 – Kansas City, 4 – Louisville
Noduri destinație: 5 – Detroit, 6 – Miami, 7 – Dallas, 8 – New Orleans

Exemplu – modelul LP complet

Min	$2x_{13}$	$+3x_{14}$	$+3x_{23}$	$+1x_{24}$	$+2x_{35}$	$+6x_{36}$	$+3x_{37}$	$+6x_{38}$	$+4x_{45}$	$+4x_{46}$	$+6x_{47}$	$+5x_{48}$	
s. t.	x_{13}	$+x_{14}$		$+x_{14}$									≤ 600
			x_{23}	$+x_{24}$									≤ 400
	$-x_{13}$		$-x_{23}$		$+x_{35}$	$+x_{36}$	$+x_{37}$	$+x_{38}$					$= 0$
		$-x_{14}$		$-x_{24}$					$+x_{45}$	$+x_{46}$	$+x_{47}$	$+x_{48}$	$= 0$
					x_{35}				$+x_{45}$				$= 200$
						x_{36}				$+x_{46}$			$= 150$
							$+x_{37}$				$+x_{47}$		$= 350$
								x_{38}				$+x_{48}$	$= 300$
	$x_{ij},$	x_{jk}	$\geq 0,$	$\forall$	i, j, k								



Exemplu – soluția optimă

- Cost total minim: **5200 dolari**



Ruta (arc)	Cost (\$)	Unitati transportate	Cost total (\$)
Denver - Kansas City	2	550	1100
Denver - Louisville	3	50	150
Atlanta - Kansas City	3	0	0
Atlanta - Louisville	1	400	400
Kansas City - Detroit	2	200	400
Kansas City - Miami	6	0	0
Kansas City - Dallas	3	350	1050
Kansas City - New Orleans	6	0	0
Louisville - Detroit	4	0	0
Louisville - Miami	4	150	600
Louisville - Dallas	6	0	0
Louisville - New Orleans	5	300	1500
Minimizare cost total (\$)			5200

Observații: bilanțul fluxurilor pe noduri

- În problemele generale de transbordare / trafic combinat, arcele pot conecta orice pereche de noduri admise în rețea
 - Este necesară **o singură constrângere de bilanț pentru fiecare nod**
 - Constrângerea include toate variabilele asociate arcelor care intră în nod sau ies din nod

Noduri sursă

flux de ieșire – flux de intrare $\leq$ oferta

Noduri destinație

flux de intrare – flux de ieșire = cererea

Noduri intermediare

flux de intrare = flux de ieșire

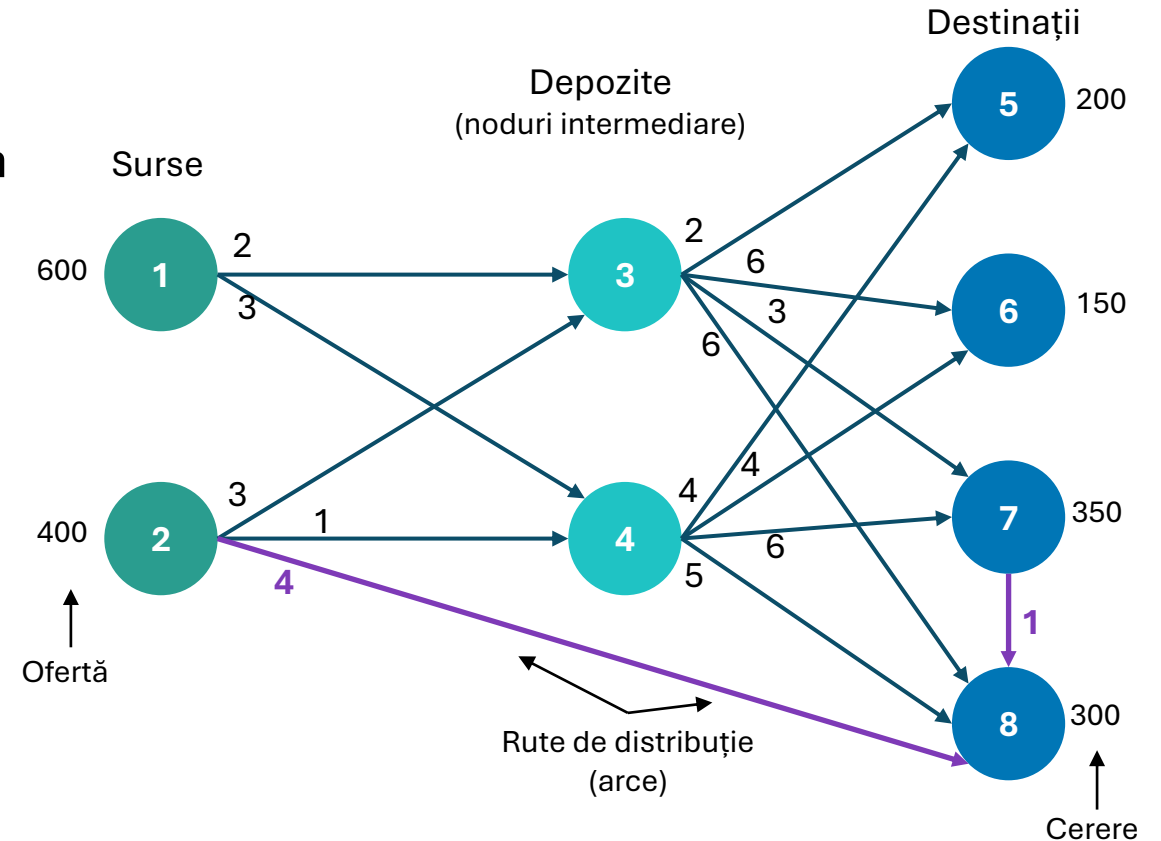
- Pentru o ilustrare a acestui tip mai general de problemă de transbordare, vom modifica problema Ryan Electronics

Problemă de transbordare: exemplu

Ex²: Să presupunem că, față de rețeaua inițială, sunt permise două rute suplimentare: de la **Atlanta** la **New Orleans**, cu un cost unitar de transport de **4 dolari**, și de la **Dallas** la **New Orleans**, cu un cost unitar de transport de **1 dolar**.

Rețeaua modificată este prezentată în figură.

- Rețeaua inițială este modificată prin adăugarea a **două arce noi**



Noduri sursă: 1 – Denver, 2 – Atlanta

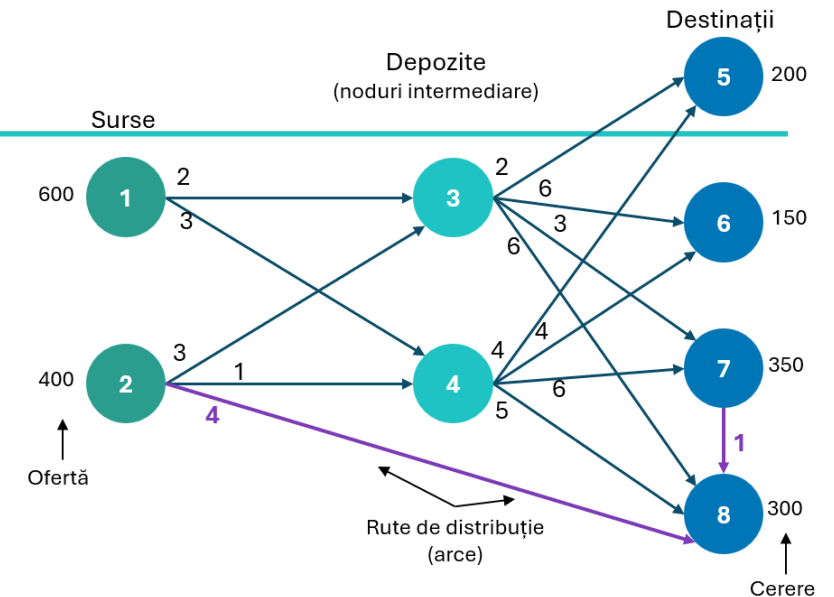
Noduri intermediare: 3 – Kansas City, 4 – Louisville

Noduri destinație: 5 – Detroit, 6 – Miami, 7 – Dallas, 8 – New Orleans

Exemplu – modelul LP complet

➤ Față de modelul anterior, sunt necesare **două variabile de decizie noi**

- x_{28} – cantitatea expedită direct de la Atlanta la New Orleans
- x_{78} – cantitatea expedită de la Dallas la New Orleans



Min	$2x_{13}$	$+3x_{14}$	$+3x_{23}$	$+1x_{24}$	$+2x_{35}$	$+6x_{36}$	$+3x_{37}$	$+6x_{38}$	$+4x_{45}$	$+4x_{46}$	$+6x_{47}$	$+5x_{48}$	$+4x_{28}$	$+1x_{78}$	
s. t.	x_{13}	$+x_{14}$		$+x_{14}$											≤ 600
			x_{23}	$+x_{24}$									$+x_{28}$		≤ 400
	$-x_{13}$		$-x_{23}$		$+x_{35}$	$+x_{36}$	$+x_{37}$	$+x_{38}$							$= 0$
		$-x_{14}$		$-x_{24}$					$+x_{45}$	$+x_{46}$	$+x_{47}$	$+x_{48}$			$= 0$
					x_{35}				$+x_{45}$						$= 200$
						x_{36}				$+x_{46}$					$= 150$
							$+x_{37}$				$+x_{47}$				$= 350$
								x_{38}				$+x_{48}$	$+x_{28}$	$+x_{78}$	$= 300$
	$x_{ij},$	x_{jk}	$\geq 0,$	$\forall$	i, j, k										

Exemplu – soluția optimă pentru rețeaua modificată

Model inițial: 5200 dolari

Model modificat: 4600 dolari

Reducere: 600 dolari

Ruta (arc)	Cost (\$)	Unitati transportate	Cost total (\$)						
Denver - Kansas City	2	550	1100						
Denver - Louisville	3	50	150						
Atlanta - Kansas City	3	0	0						
Atlanta - Louisville	1	100	100						
Kansas City - Detroit	2	200	400						
Kansas City - Miami	6	0	0						
Kansas City - Dallas	3	350	1050						
Kansas City - New Orleans	6	0	0						
Louisville - Detroit	4	0	0						
Louisville - Miami	4	150	600						
Louisville - Dallas	6	0	0						
Louisville - New Orleans	5	0	0						
Atlanta - New Orleans	4	300	1200						
Dallas - New Orleans	1	0	0						
			Minimizare cost total (\$)	4600					

		Unit transportate	Trafic		
Nod	Intrare	Iesire	retea		Oferta
Denver		600	600	<=	600
Atlanta		400	400	<=	400
Kansas City	550	550	0	=	0
Louisville	150	150	0	=	0
Detroit	200		-200	=	-200
Miami	150		-150	=	-150
Dallas	350	0	-350	=	-350
New Orleans	300		-300	=	-300

Ruta (arc)	Cost (\$)	Unitati transportate	Cost total (\$)						
Denver - Kansas City	2	550	1100						
Denver - Louisville	3	50	150						
Atlanta - Kansas City	3	0	0						
Atlanta - Louisville	1	400	400						
Kansas City - Detroit	2	200	400						
Kansas City - Miami	6	0	0						
Kansas City - Dallas	3	350	1050						
Kansas City - New Orleans	6	0	0						
Louisville - Detroit	4	0	0						
Louisville - Miami	4	150	600						
Louisville - Dallas	6	0	0						
Louisville - New Orleans	5	300	1500						
			Minimizare cost total (\$)	5200					

		Unit transportate	Trafic		
Nod	Intrare	Iesire	retea		Oferta
Denver		600	600	<=	600
Atlanta		400	400	<=	400
Kansas City	550	550	0	=	0
Louisville	450	450	0	=	0
Detroit	200		-200	=	-200
Miami	150		-150	=	-150
Dallas	350		-350	=	-350
New Orleans	300		-300	=	-300

Interpretare:

- ruta nouă **Atlanta → New Orleans** este utilizată pentru **300 unități**
- costul total scade de la **5200** la **4600 dolari**
- ruta **Dallas → New Orleans** nu este utilizată în soluția optimă

În urmă cu câțiva ani, **Procter & Gamble** (P&G) a inițiat un amplu proiect de planificare strategică pentru aprovizionarea cu produse în America de Nord

- Scopul a fost **consolidarea surselor de producție** și **optimizarea sistemului de distribuție**
- Sistemul de suport decizional dezvoltat, numit PSH (*Practical Product Supply Research*), a fost bazat pe un model de transbordare similar celui discutat anterior

Modelarea rețelei

În etapa de preprocesare, produsele au fost grupate în funcție de tehnologii comune și de posibilitatea de a fi fabricate în aceleași unități

- fabricile au fost considerate **noduri sursă**
- centrele regionale de distribuție au fost considerate **noduri intermediare**
- zonele clienților au fost considerate **noduri destinație**

Tipuri de fluxuri permise

- expedieri directe către zonele clienților
- expedieri prin centrele de distribuție

Optimizarea aprovizionării la Procter & Gamble³

³Pe baza informațiilor date de Franz Dill și Tom Chormande la Procter & Gamble

Utilizare interactivă

Echipele responsabile de strategia produselor au folosit sistemul pentru a testa scenarii privind aprovizionarea și distribuția produselor

- De exemplu, puteau analiza impactul închiderii a două din cinci fabrici și consolidarea producției în cele trei fabrici rămase
- Modelul elimina din rețea nodurile sursă corespunzătoare fabricilor închise, actualiza capacitățile disponibile și rezolva din nou problema de transbordare
- Echipele puteau compara soluțiile și testa scenarii alternative

Impact

Modelul a fost considerat un sistem valoros de suport decizional

- Implementarea rezultatelor studiului a generat economii anuale de aproximativ **200 milioane de dolari**
- Sistemul s-a dovedit suficient de eficient pentru a fi utilizat și pe alte piețe

Optimizarea aprovizionării la Procter & Gamble³

³Pe baza informațiilor date de Franz Dill și Tom Chormande la Procter & Gamble

Cuprins

Introducere

Probleme de transport

Probleme de transbordare / trafic combinat

Probleme de atribuire / alocare

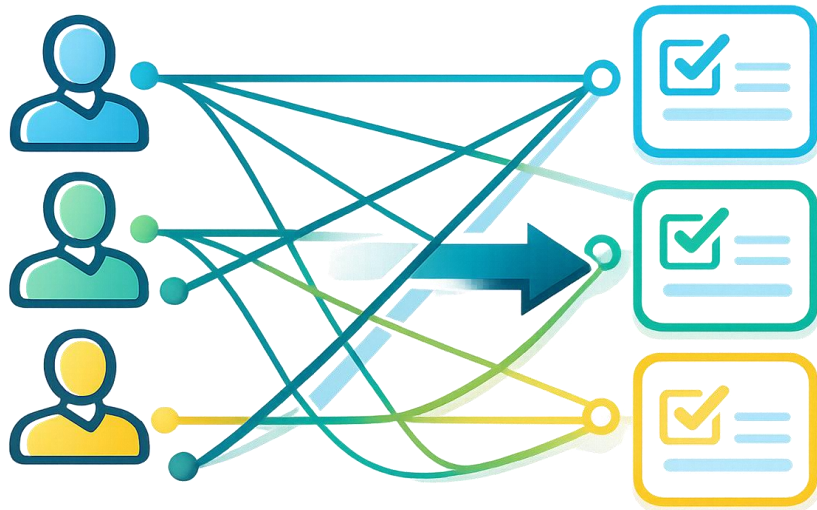
- Cazuri speciale
- Exemplu

Rezumat

Probleme de atribuire / alocare

Problemele de atribuire (*assignment problems*) apar în situații în care trebuie alocate sarcini unor agenți, astfel încât să fie optimizat un criteriu de performanță

Caracteristică distinctivă: fiecare sarcină este atribuită unui singur agent, iar fiecărui agent i se atribuie cel mult o sarcină



Obiectiv

Determinarea alocării optime a sarcinilor, astfel încât să se obțină:

- minimizarea costurilor
- minimizarea timpului
- maximizarea profiturilor



Exemple de aplicații:

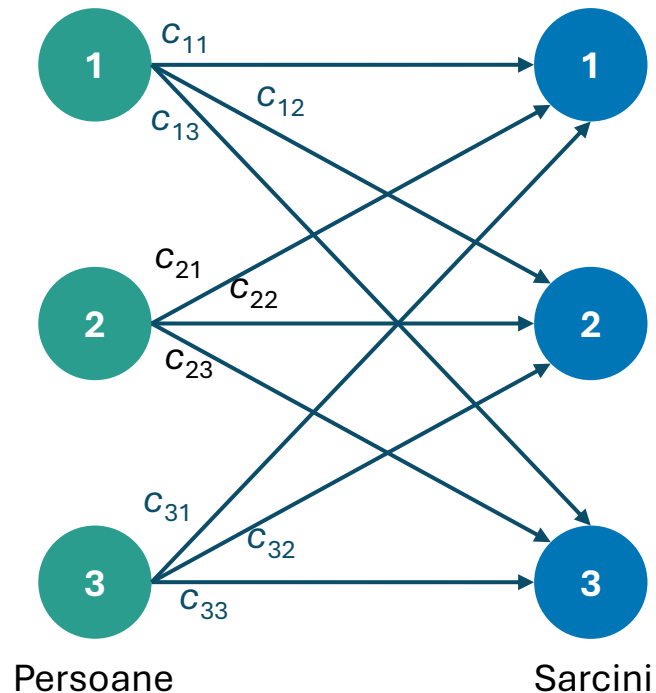
- alocarea utilajelor la lucrări
- alocarea personalului de vânzări pe teritorii
- atribuirea contractelor către ofertanți

O **problemă de atribuire** poate fi privită ca un caz particular al unei probleme de transport, în care toate ofertele și toate cererile sunt egale cu 1

- Problemele de atribuire pot fi formulate și rezolvate ca modele LP

Probleme de atribuire (cont.)

Ex: Rețea de alocare a personalului



Notatii

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă persoana } i \text{ se atribuie sarcina } j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

c_{ij} – costul unitar de atribuire a persoanei i la sarcina j

➤ Model matematic

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} && \text{(funcția obiectiv)} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} && \text{(sarcini)} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = \overline{1, m} && \text{(persoane)} \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Probleme de atribuire: cazuri speciale

- **Problema de atribuire** = caz particular al problemei de transport $\Rightarrow$ cazurile speciale care pot apărea într-o problemă de atribuire sunt asemănătoare cu cele pentru problema transportului

Număr total de persoane (oferta totală) $\neq$ număr total sarcini (cererea totală)

Număr total de persoane $>$ număr total de sarcini

- Persoanele suplimentare rămân neasignate în soluția LP,
- Sau, dacă toate persoanele trebuie asignate, se pot introduce sarcini fictive

Număr total de sarcini $>$ număr total de persoane

- Modelul LP nu are soluție fezabilă în forma inițială
- Se pot introduce persoane/agenți fictivi pentru a egala numărul de persoane și numărul sarcinilor
- Coeficienții funcției obiectiv pentru aceste variabile pot fi zero $\Rightarrow$ atribuirile către persoane fictive indică sarcini care rămân neacoperite de persoane reale în soluția obținută

Idee-cheie: dezechilibrul dintre numărul de persoane și numărul de sarcini se tratează prin persoane/sarcini neasignate sau prin introducerea unor agenți/sarcini fictive

Probleme de atribuire: cazuri speciale (cont.)

Obiectiv de maximizare

Dacă alternativele de atribuire sunt evaluate în termeni de venituri sau profit, modelul LP poate fi formulat ca o problemă de maximizare

Atribuirii incompatibile / imposibile

Dacă o anumită pereche agent–sarcină nu este permisă, variabila corespunzătoare poate fi eliminată din model sau se poate impune $x_{ij} = 0$

- De exemplu, un agent nu are competența/experiența necesară pentru o anumită sarcină

O persoană poate îndeplini mai multe sarcini

- Formularea LP poate fi modificată:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}$$

a_i – numărul maxim de sarcini care pot fi atribuite persoanei i

O sarcină necesită mai mult de o persoană pentru a fi îndeplinită

- Formularea LP poate fi modificată:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}$$

b_j – numărul de persoane necesare pentru sarcina j

Problemă de atribuire: exemplu

Ex: Compania X, specializată în cercetări de marketing, a primit cereri pentru realizarea a trei studii de piață, din partea a trei clienți noi. Pentru fiecare client trebuie desemnat câte un **lider de proiect**. În prezent, trei persoane sunt disponibile pentru acest rol. Timpul necesar finalizării fiecărui proiect depinde de experiența și capacitatea liderului desemnat.

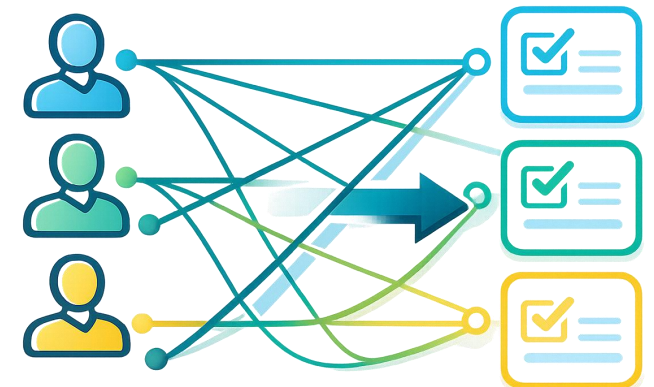
Obiectivul conducerii este atribuirea liderilor de proiect astfel încât **numărul total de zile necesare pentru finalizarea celor trei proiecte să fie minim**.

Întrebare: dacă fiecărui client trebuie să i se atribue un singur lider de proiect, iar fiecare lider poate fi atribuit unui singur client, care este alocarea optimă?

Lider proiect	Client		
	1	2	3
1. Luca	10	15	9
2. Ștefan	9	18	5
3. Tania	6	14	3

Tabelul prezintă timpul estimat de finalizare, în zile, pentru fiecare pereche lider–client.

Decizie: alegerea perechilor lider–client care minimizează timpul total



Problemă de atribuire – rețeaua de transport și variabilele de decizie

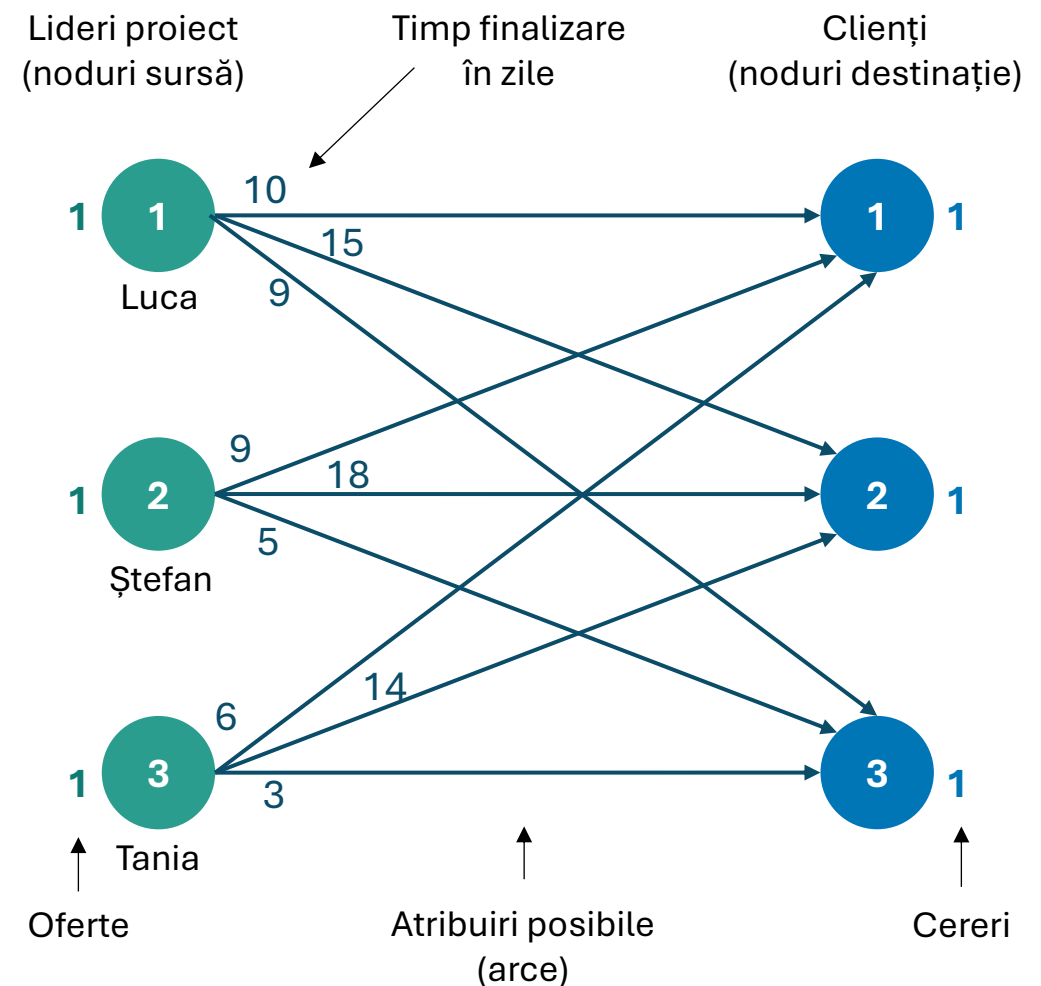
Modelul de rețea pentru problema de atribuire a liderilor de proiect

- Caz special al problemei de transport
 - Toate valorile ofertei și cererii sunt egale cu 1
 - Costul atribuirii unui lider de proiect unui client este reprezentat de timpul necesar finalizării proiectului
 - Valoarea fiecărei variabile de decizie este fie 0, fie 1

Variabile de decizie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă liderului } i \text{ i se atribuie clientul } j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Lider proiect	Client		
	1	2	3
1. Luca	10	15	9
2. Ștefan	9	18	5
3. Tania	6	14	3



Problemă de atribuire – formularea modelului LP

Funcția obiectiv: minimizarea timpului necesar rezolvării cerințelor clienților

$$\text{Min } 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

zile asociate atribuirilor lui Luca + zile asociate atribuirilor lui Ștefan + zile asociate atribuirilor Taniei

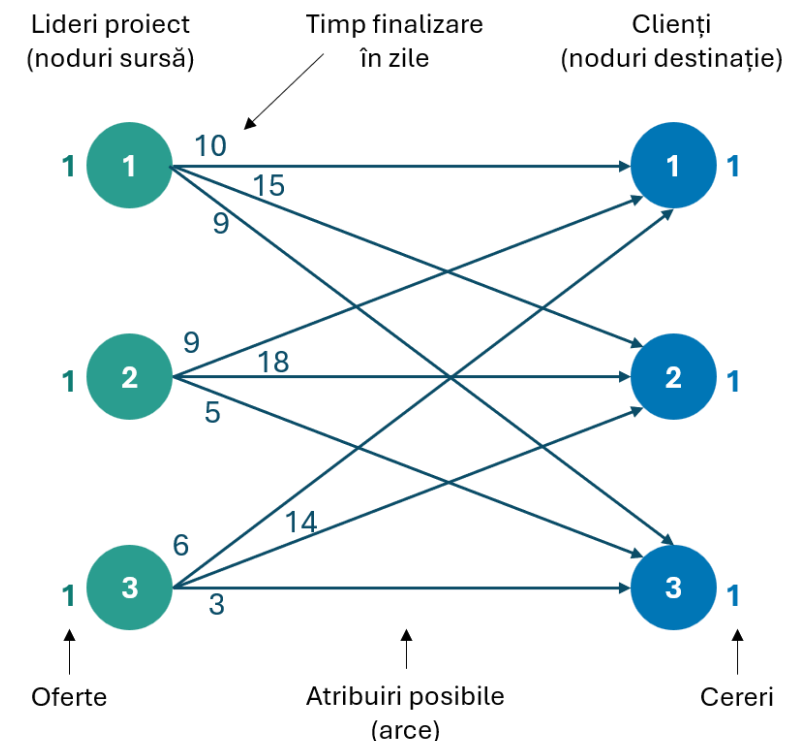
➤ **Constrângeri:** restricțiile reflectă faptul că fiecărui lider de proiect îi poate fi atribuit cel mult un client, iar fiecare client trebuie să aibă exact un lider de proiect atribuit

C1 – C3: restricții pentru liderii de proiect

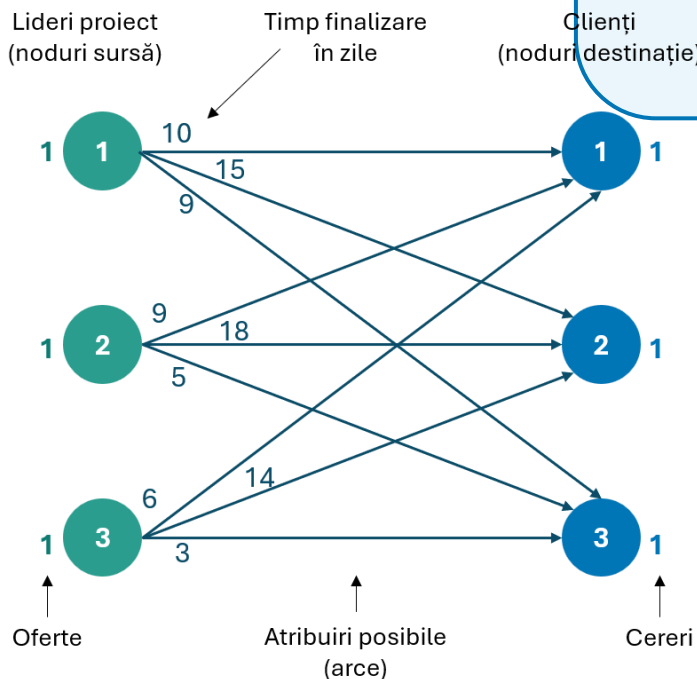
- Alocarea lui Luca: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$
- Alocarea lui Ștefan: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$
- Alocarea Taniei: $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$

C4 – C6: restricții pentru clienți

- Cerere client 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$
- Cerere client 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$
- Cerere client 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$



Exemplu – modelul LP complet



$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33} \\
 \text{s.t.} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

OBS: formularea modelului LP pentru problema de atribuire

- Fiecare arc lider–client corespunde unei variabile binare x_{ij}
- Variabila este 1 dacă atribuirea este aleasă și 0 în caz contrar
- Fiecare lider poate fi atribuit cel mult unui client
- Fiecare client trebuie să primească exact un lider
- Se minimizează timpul total al atribuirilor selectate

Exemplu – soluția optimă

➤ Soluția optimă:

- Timpul total minim pentru finalizarea proiectelor: **26 zile**
- **Atribuire optimă** lider de proiect – client



Minimizare timp finalizare				26		
Lider proiect	la client 1	la client 2	la Client 3	Total		
Luca	0	1	0	1	<=	1
Stefan	0	0	1	1	<=	1
Tania	1	0	0	1	<=	1
Total	1	1	1			
	=	=	=			
	1	1	1			

Interpretare

- Luca este atribuit clientului 2: 15 zile
- Ștefan este atribuit clientului 3: 5 zile
- Tania este atribuită clientului 1: 6 zile
- Timp total minim: **26 zile**

Observații

De ce apar valori 0/1?

Problemele de atribuire pot fi privite ca un caz particular al problemelor de transport

- În problemele de transport, dacă toate ofertele și cererile sunt valori întregi, există o soluție optimă cu valori întregi ale variabilelor de decizie
- Într-o problemă de atribuire, toate ofertele și cererile sunt egale cu 1
 - ⇒ poate fi aleasă o soluție optimă în care variabilele de decizie au valori 0 sau 1

Ce facem dacă sunt mai multe sarcini decât persoane?

Dacă numărul de sarcini depășește numărul de persoane, situația poate fi tratată prin introducerea unei **persoane fictive**

- persoana fictivă primește capacitatea de a gestiona mai multe sarcini
- capacitatea persoanei fictive este egală cu diferența dintre numărul de sarcini și numărul de persoane
- sarcinile atribuite persoanei fictive reprezintă sarcini care nu sunt acoperite de persoane reale

La momentul studiului, Heery International contracta cu statul Tennessee și cu alte state diverse proiecte de construcții, inclusiv facilități pentru instituții de învățământ superior, hoteluri și parcuri

- Asistat de un consultant extern, Heery International a dezvoltat un model matematic pentru atribuirea managerilor de construcții la diferitele proiecte

Context operațional

- Heery avea, de obicei, peste **100 de proiecte** în derulare
- Fiecare proiect trebuia să aibă **un singur manager**
- Cu 7 manageri disponibili și 100 de proiecte, rezultau aproximativ **700 de variabile binare**

Model de atribuire

- Fiecare variabilă **0/1** corespundea unei perechi **manager-proiect**
- Coeficientul din funcția obiectiv combina:
 - intensitatea proiectului
 - distanța de deplasare de la locuința managerului la șantier

Funcția obiectiv

- Minimiza costul total asociat atribuirilor manager-proiect selectate

Atribuirea managerilor de proiect la Heery International⁴

⁴Larry J. LeBlanc, Dale Randels, Jr., T. K. Swann, "Heery International's Spreadsheet Optimization Model for Assigning Managers to Construction Projects", *Interfaces* (November/December 2000): 95–106

Extinderea modelului de atribuire

În practică, Heery avea mai multe proiecte decât manageri disponibili. De aceea, modelul permitea ca un manager să fie atribuit mai multor proiecte

Constrângeri principale

- Fiecare proiect trebuia să primească **exact un manager**
- Fiecare manager putea primi mai multe proiecte, dar numai până la o limită acceptabilă de „intensitate” totală
- Modelul urmărea minimizarea costului/scorului total asociat atribuirilor

Impact

- Modelul a fost implementat cu succes la Heery International
- A fost considerat util pentru atribuirea managerilor la proiecte
- Utilizarea modelului a fost extinsă și în alte birouri ale organizației

Potrivit lui Emory F. Redden, vicepreședinte al Heery International:

Modelul de optimizare a fost foarte util pentru atribuirea managerilor la proiecte și a fost extins ulterior și în alte birouri ale organizației

Atribuirea managerilor de proiect la Heery International⁴

⁴Larry J. LeBlanc, Dale Randels, Jr., T. K. Swann, "Heery International's Spreadsheet Optimization Model for Assigning Managers to Construction Projects", *Interfaces* (November/December 2000): 95–106

Cuprins

Probleme de transport

- ✓ Cazuri speciale
- ✓ Exemplu
- ✓ Atribuirea vagoanelor de marfă la Union Pacific Railroad

Probleme de transbordare / trafic combinat

- ✓ Cazuri speciale
- ✓ Exemplu
- ✓ Optimizarea aprovizionării la Procter & Gamble

Probleme de atribuire / alocare

- ✓ Cazuri speciale
- ✓ Exemplu
- ✓ Atribuirea managerilor de proiect la Heery International

→ Modelarea problemelor de rețea și distribuție (II)